KARYA TULIS ILMIAH

INTEGRABILITAS MODEL CALOGERO-MOSER
PADA RUANG AKAR ALJABAR LIE: A_n

Oleh:
I Nengah Artawan, S.Si., M.Si.
[Divisi Fisika Teori]

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS UDAYANA
2016

HALAMAN PENGESAHAN

1	Judul Karya Tulis Ilmiah		:	Integrabilitas Model Calogero-Moser pada Ruang Akar Aljabar Lie: A_n
2	Penulis			
	a.	Nama lengkap dengan gelar	:	I Nengah Artawan, S.Si., M.Si.
	b.	Jenis Kelamin	:	Laki-laki
	c.	Pangkat/Golongan/NIP	:	Penata/III-c/19700712 199702 1 001
	d.	Jabatan Fungsional	:	Lektor
	e.	Fakultas/Jurusan	:	MIPA/Fisika
	f.	Universitas	:	Udayana
	g.	Bidang Ilmu yang diteliti	:	Fisika Teori: Dinamika Non Linier Partikel
3	Jumlah Penulis		:	1(satu) orang
4	Lokasi		:	Divisi Fisika Teori, Fisika FMIPA Unud
5	Kerjasama			
	a.	Nama Instansi	:	-
6	Jangka Waktu Penelitian		:	5(lima) bulan

Denpasar, 25 Januari 2016

Mengetahui, Dekan FMIPA Unud	Penulis
<u>Drs. Ida Bagus Made Suaskara, M.Si</u> NIP. 19660611 199702 1 001	<u>I Nengah Artawan, S.Si., M.Si.</u> NIP. 19700712 199702 1 001

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan karya tulis ilmiah ini dengan judul: **"**Integrabilitas Model Calogero-Moser Pada Ruang Akar Aljabar Lie: A_n**"** sesuai dengan alokasi waktu.

Penulisan ini tidak akan terselesaikan tanpa bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada: Ni Luh Putu Trisnawati, M.Si.,yang telah banyak meluangkan waktunya untuk berdiskusi, saling memberikan masukan, dan saran demi terselesaikannya karya tulis ilmiah ini.

Penulis menyadari bahwa karya tulis ilmiah ini masih jauh dari sempurna, karena keterbatasan kemampuan dan pengetahuan yang dimiliki. Maka dari itu segala koreksi dan saran yang bersifat membangun sangat diharapkan.

Denpasar, Desember 2015

Penyusun

ABSTRAK

Model Calogero-Moser adalah sistem dinamika berdimensi satu yang diasosiasikan dengan sistem akar aljabar Lie. Model ini adalah integrabel dan integrabilitasnya dijelaskan melalui pasangan operator Lax yang dibangun dalam sistem akar aljabar Lie *simply-laced*..

Dalam karya tulis ilmiah ini, diperkenalkan pasangan operator Lax untuk model Calogero-Moser yang dibangun dalam sistem akar aljabar Lie *simply-laced*, khususnya aljabar Lie: A_n. Persamaan gerak kanonik yang didapatkan dari formalisma Lax ini adalah konsisten dengan persamaan gerak kanonik yang didapatkan dari formalisma Hamiltonian. Secara eksplisit, ditinjau model Calogero-Moser dalam sistem akar aljabar Lie: A_2 dan A_3.

ABSTRACT

The Calogero-Moser model is an one-dimensional dynamical system associated with the root system of a Lie algebra. This model is integrable and its integrability is described through the Lax operator pair built in the simply-laced root systems.

In this paper, the new Lax operator pair is introduced for the Calogero-Moser model built in the root system of the simply-laced Lie algebra, especially the A_n Lie algebras. The canonical equation of motion derived from the Lax and Hamiltonian formalism are consistence. Explicitly, the Calogero-Moser model in the A_2 and A_3 Lie algebra root systems are considered.

BAB I
PENDAHULUAN

Studi dinamika nonlinier partikel banyak telah lama dilakukan. Pada tahun 1970-an, Calogero dan Moser secara independen meninjau kasus dinamika nonlinier yang diakibatkan oleh potensial interaksi berbentuk: (i) $1/L^2$, (ii) $1/\sin^2 L$, dan $1/\sinh^2 L$, dimana L adalah "jarak" antara partikel. Sistem ini adalah integrabel dalam arti solusi eksaknya dapat diperoleh. Studi lebih jauh untuk sistem ini menunjukkan bahwa parameter jarak L di atas dapat dikaitkan dengan akar-akar dari suatu aljabar Lie dan sifat integrabilitasnya masih dipenuhi (Olshanetsky & Perelomov, 1980; Scholma, 1993). Pada umumnya integrabilitas dari suatu dinamika nonlinier ditunjukkan melalui formalisma pasangan Lax.

Dalam penelitian ini ini akan dibahas penentuan operator Lax yang memberikan persamaan gerak kanonik untuk model Calogero-Moser yang berdasarkan sistem akar dari aljabar Lie *simply-laced*. Selanjutnya, persamaan gerak kanonik dari formalisma pasangan Lax dibandingkan dengan persamaan gerak kanonik dari formalisma Hamiltonian-nya.

Sistematika penulisan yang dilakukan adalah sebagai berikut, bab I merupakan pendahuluan, dilanjutkan dengan bab II yang membahas formalisma Hamiltonian. Dalam penelitian ini hanya ditinjau aljabar Lie: A_n

Pada bab III merupakan inti dari penelitian ini dibahas integrabilitas model Calogero-Moser pada sistem akar aljabar Lie *simply-laced*: A_n. Dijelaskan juga mengenai pembuktian konsistensi dari tiap bagian uraian persamaan Lax.

Akhirnya, bab IV merupakan kesimpulan hasil-hasil yang telah diperoleh dari bab-bab sebelumnya. Uraian singkat mengenai aljabar Lie dan representasi ruang akar dicantumkan pada Apendiks.

BAB II

FORMALISMA HAMILTONIAN
MODEL CALOGERO-MOSER

2.1.Formalisma Hamiltonian

Model Calogero-Moser adalah sistem dinamika berdimensi satu dengan interaksi pasangan berjangkauan jauh. Dalam bab ini ditinjau model Calogero-Moser berdasarkan sistem akar dari aljabar Lie semi-sederhana (*semi-simple*) dan terhubung secara sederhana (*simply-laced*) (Bordner,et.al,1998). Dalam hal ini hanya diperlukan data himpunan akar dari aljabar Lie yang ditinjau. Himpunan akar dan jumlahnya masing-masing disimbolkan Δ dan *Dim*. *Dim* aljabar Lie terhubung secara sederhana: A_r, D_r, E_6, E_7, dan E_8 masing-masing: r(r+1), 2r(r-1), 72, 126, dan 240 (Gilmore, 1974). Vektor-vektor akar ini memiliki dimensi r, yaitu *rank* dari aljabar yang bersangkutan dan umumnya vektor ini dipilih memiliki $(\text{panjang})^2=2$,

$$\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}^r,\ \alpha^2 = \alpha.\alpha = 2,\ \forall \alpha \in \Delta. \tag{2.1}$$

Variabel dinamika model Calogero-Moser ini berupa koordinat kanonik $\{q^j\}$ dan momentum konjugat $\{p_j\}$ dilengkapi dengan *Poisson bracket*:

$$q1, \ldots, qr,\ \ p1, \ldots, pr, \{qj\ ,pk\} = \delta j, k, \{qj\ ,qk\} = \{pj\ ,pk\} = 0, \tag{2.2}$$

dan pasangan variabel kanonik ini disusun dalam bentuk vektor q dan p berdimensi r, dituliskan:

$$q = (q1, \ldots, qr) \in \mathbb{R}r,\ p = (p1, \ldots, pr) \in \mathbb{R}r, \tag{2.2a}$$

sehingga produk skalar dari q dan p dengan akar-akar: α.q, p.β, dan seterusnya dapat didefinisikan.

Akar-akar dalam ruang akar Δ dihubungkan dengan refleksi Weyl. Tinjau ξ merupakan sebuah vektor di $\mathbb{R}^r$ dan β∈Δ. Refleksi Weyl dari vektor ξ terhadap akar β didefinisikan:

$$W_\beta(\xi) = \xi - \frac{2(\beta.\xi)\beta}{\beta^2}. \tag{2.3}$$

Refleksi Weyl membentuk sebuah grup yang disebut grup Weyl, dengan $W_\beta^2 = 1$ dan $W_\beta = W_{-\beta} = W_\beta^{-1}$. Sistem akar dalam aljabar Lie semi-sederhana (*semi-simple*) adalah invarian terhadap refleksi Weyl ini:

$$W\beta(\alpha) \in \Delta,\quad \forall \alpha, \beta \in \Delta. \tag{2.4}$$

Demikian juga refleksi Weyl berlaku pada variabel dinamikanya:

$$q \to q' = W_\beta(q),\quad p \to p' = W_\beta(p),\quad \forall \beta \in \Delta. \tag{2.5}$$

2.1.1. Hamiltonian Calogero-Moser

Hamiltonian model Calogero-Moser yang didasarkan pada aljabar Lie terhubung sederhana (*simply-laced*) berbentuk (Bordner, et.al, 1998):

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{g^2}{2}\sum_{\alpha\in\Delta} x(\alpha.q)\,x(-\alpha.q). \tag{2.6}$$

Fungsi x(t) di atas dan fungsi-fungsi lain yang terkait untuk ketiga potensial interaksi yang ditinjau dalam tesis ini adalah:

a). potensial rasional, $1/L^2$,

$$x(t) = x_r(t) = \frac{1}{t}\ ,\ y(t) = y_r(t) = -\frac{1}{t^2}\ ,\ z(t) = z_r(t) = -\frac{1}{t^2}\ , \tag{2.7}$$

b). potensial trigonometri, $1/\sin^2 L$,

$$\begin{aligned} &x(t) = x_r(t) = a\cot at,\ y(t) = y_r(t) = -\frac{a^2}{\sin^2 at}, \\ &z(t) = z_r(t) = -\frac{a^2}{\sin^2 at}, \end{aligned} \quad \text{a: konstanta,} \tag{2.8}$$

c). potensial hiperbolik, $1/\sinh^2 L$,

$$\begin{aligned} &x(t) = x_r(t) = a\coth at,\ y(t) = y_r(t) = -\frac{a^2}{\sinh^2 at}, \\ &z(t) = z_r(t) = -\frac{a^2}{\sinh^2 at}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dari ketiga bentuk potensial di atas terlihat bahwa, y(t) dan z(t) merupakan bentuk turunan dari x(t) terhadap parameter t. Fungsi x(t) merupakan fungsi ganjil dan fungsi y(t) serta z(t) merupakan fungsi genap dan memenuhi aturan penjumlahan (*sum-rule*) berikut:

$$y(u)\,x(v) - y(v)\,x(u) = x(u+v)\big[z(u) - z(v)\big] \quad u,v \in \mathbb{C}, \tag{2.10}$$

dan fungsi z(t) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$z(t) = x(t)\,x(-t) + \text{konstanta}\,. \tag{2.11}$$

Persamaan gerak kanonik yang diturunkan dari Hamiltonian pada persamaan (2.6) adalah sebagai berikut:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p\ , \tag{2.12}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{g^2}{2}\sum_{\alpha\in\Delta}\big(x(\alpha.q)\,y(-\alpha.q) - x(-\alpha.q)\,y(\alpha.q)\big)\alpha. \tag{2.13}$$

BAB III

INTEGRABILITAS MODEL CALOGERO-MOSER PADA RUANG AKAR: A_N

3.1.Formalisma Lax

Pasangan Lax dalam bentuk akar untuk sistem Calogero-Moser adalah sebagai berikut [Bordner, et al, 1998]:

$$L(q,p) = p \cdot H + X + X_r,$$

$$M(q) = D + Y + Y_r. \tag{3.1}$$

Dimana *L*, *H*, *X*, X_r, *D*, *Y* dan Y_r adalah matriks berukuran *Dim* × *Dim* dengan *Dim* adalah dimensi dari ruang akar Δ. Dalam bentuk akar, pasangan operator *L* dan *M* dilabel dengan akar-akarnya, dalam tugas akhir ini dinotasikan oleh α, β, γ, η dan κ.

Dalam persamaan di atas *H* dan *D* adalah matriks diagonal yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H_{\beta\gamma} = \beta\delta_{\beta,\gamma}, \qquad D_{\beta\gamma} = \delta_{\beta,\gamma} D_\beta, \qquad D_\beta = -ig\left(z(\beta \cdot q) + \sum_{\kappa\in\Delta,\ \kappa\cdot\beta=1} z(\kappa \cdot q)\right). \tag{3.2}$$

Operator *X* dan *Y* mempunyai bentuk yang sama tapi dibedakan oleh kebergantungan terhadap koordinat *q*:

$$X = ig\sum_{\alpha\in\Delta} x(\alpha \cdot q)E(\alpha), \quad Y = ig\sum_{\alpha\in\Delta} y(\alpha \cdot q)E(\alpha), \quad E(\alpha)_{\beta\gamma} = \delta_{\beta-\gamma,\alpha}. \tag{3.3}$$

dan operator X_r dan Y_r didefinisikan sebagai berikut:

$$X_r = 2ig\sum_{\alpha\in\Delta} x_r(\alpha \cdot q)E_d(\alpha), \quad Y_r = ig\sum_{\alpha\in\Delta} y_r(\alpha \cdot q)E_d(\alpha), \quad E_d(\alpha)_{\beta\gamma} = \delta_{\beta-\gamma,2\alpha}. \tag{3.4}$$

Matriks $E(\alpha)$ dan $E_d(\alpha)$ disebut pembeda akar (*root discriminator*). Matriks $E(\alpha)$ bernilai satu bila selisih dari dua buah indeksnya sama dengan akar α dan matriks $E_d(\alpha)$ bernilai satu bila selisih dari dua buah indeksnya sama dengan dua kali akar α.

Dari persaman (3.3) elemen-elemen matriks $X_{\beta\gamma}$ dan $Y_{\beta\gamma}$ tidak sama dengan nol hanya ketika $\beta-\gamma$ adalah sebuah akar. Untuk sistem akar terhubung secara sederhana (*simply laced*) dengan (panjang)^2 = 2, elemen matriks tersebut dapat diungkapkan kembali sebagai berikut:

$$X_{\beta\gamma}=0 \qquad \text{dan} \qquad Y_{\beta\gamma}=0 \qquad \text{jika} \qquad \beta\cdot\gamma\neq 1. \tag{3.5}$$

Bentuk matriks D dapat ditulis seperti bentuk matriks X dan Y :

$$D=-ig\sum_{\alpha\in\Delta}z(\alpha\cdot q)K(\alpha), \qquad K(\alpha)_{\beta\gamma}=\delta_{\beta,\gamma}\left(\delta_{\alpha,\beta}+\theta(\alpha\cdot\beta)\right). \tag{3.6}$$

dimana

$$\theta(t)=\begin{cases} 1, & t=1, \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \tag{3.7}$$

3.2.Konsistensi Pasangan Lax

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa pasangan operator Lax (3.1) ekivalen dengan persamaan gerak kanonik untuk Hamiltonian (2.11) dan (2.12):

$$\dot{q}=p\,, \quad \dot{p}=-\frac{\partial}{\partial q}\mathcal{H}=-\frac{g^2}{2}\sum_{\alpha\in\Delta}\left(x(\alpha\cdot q)y(-\alpha\cdot q)-x(-\alpha\cdot q)y(\alpha\cdot q)\right)\alpha\,. \tag{3.8}$$

Dengan mensubstistusikan persamaan (3.1) ke persamaan Lax didapat:

$$\dot{L}=\left[p\cdot H+X+X_r,D+Y+Y_r\right]. \tag{3.9}$$

Persamaan Lax di atas disusun kembali menjadi tiga bagian:

$$\frac{d}{dt}\left(X+X_r\right)=\left[p\cdot H,Y+Y_r\right], \tag{3.10a}$$

$$\frac{dp}{dt}\cdot H=\left[X+X_r,Y+Y_r\right]\ \text{bagian diagonal}, \tag{3.10b}$$

$$0=\left[X+X_r,D+Y+Y_r\right]\text{bagian off}-\text{diagonal}. \tag{3.10c}$$

Dapat dilihat bahwa persamaan (3.10a) ekivalen dengan suku pertama persamaan gerak kanonik $\dot{q}=p$, dengan mengambil komponen (β,γ) dari persamaan (3.10a) didapatkan:

$$[p \cdot H, Y]_{\beta\gamma} = ig \sum_{\alpha \in \Delta} y(\alpha \cdot q) E(\alpha)_{\beta\gamma}\, p \cdot (\beta - \gamma)$$

$$= ig \sum_{\alpha \in \Delta} y(\alpha \cdot q) \delta_{\beta-\kappa,\alpha}\, p \cdot (\beta - \gamma)$$

$$= ig \sum_{\alpha \in \Delta} y(\alpha \cdot q) E(\alpha)_{\beta\gamma}\, p \cdot \alpha$$

$$= \frac{d}{dt} X_{\beta\gamma} = \frac{d}{dt}\left(ig \sum_{\alpha \in \Delta} x(\alpha \cdot q) E(\alpha)_{\beta\kappa} \right)$$

$$= ig \sum_{\alpha \in \Delta} y(\alpha \cdot q) E(\alpha)_{\beta\gamma}\, \dot{q} \cdot \alpha \qquad (3.11)$$

sehingga didapat $\dot{q} = p$ dimana terlihat dari definisi fungsi *x* dan *y* pada persamaan (2.12) dan (2.13), bahwa $x' = y$ tanda aksen adalah notasi differensiasi. Hal yang serupa juga berlaku pada X_r dan Y_r.

Dengan menggunakan persamaan (3.5), maka uraian untuk persamaan (3.10b) adalah sebagai berikut:

$$[X, Y]_{\beta\beta} = \sum_{\kappa \in \Delta,\ \kappa \cdot \beta = 1} \left(X_{\beta\kappa} Y_{\kappa\beta} - Y_{\beta\kappa} X_{\kappa\beta} \right)$$

$$= -g^2 \sum_{\kappa \in \Delta,\ \kappa \cdot \beta = 1} \left(\sum_{\alpha \in \Delta} x(\alpha \cdot q) E(\alpha)_{\beta\kappa}\, y(\alpha \cdot q) E(\alpha)_{\kappa\beta} - \sum_{\alpha \in \Delta} y(\alpha \cdot q) E(\alpha)_{\beta\kappa}\, x(\alpha \cdot q) E(\alpha)_{\kappa\beta} \right)$$

$$= -g^2 \sum_{\kappa \in \Delta,\ \kappa \cdot \beta = 1} \left(\sum_{\alpha \in \Delta} x(\alpha \cdot q) \delta_{\beta-\kappa,\alpha}\, y(\alpha \cdot q) \delta_{\kappa-\beta,\alpha} - \sum_{\alpha \in \Delta} y(\alpha \cdot q) \delta_{\beta-\kappa,\alpha}\, x(\alpha \cdot q) \delta_{\kappa-\beta,\alpha} \right)$$

$$= -g^2 \sum_{\kappa \in \Delta,\ \kappa \cdot \beta = 1} \left[x((\beta-\kappa) \cdot q) y((\kappa-\beta) \cdot q) - y((\beta-\kappa) \cdot q) x((\kappa-\beta) \cdot q) \right],$$

dengan cara yang sama juga didapatkan:

$$[X, Y_r]_{\beta\beta} = [X_r, Y]_{\beta\beta} = 0,$$

karena,

$$\left[X, Y_r\right]_{\beta\beta} = \sum_{\kappa\in\Delta,\ \kappa\cdot\beta=1}\left(X_{\beta\kappa}\left(Y_r\right)_{\kappa\beta} - \left(Y_r\right)_{\beta\kappa} X_{\kappa\beta}\right)$$

$$= \sum_{\kappa\in\Delta,\ \kappa\cdot\beta=1}\left(\sum_{\alpha\in\Delta} x(\alpha\cdot q)E(\alpha)_{\beta\kappa}\, y_r(\alpha\cdot q)E_d(\alpha)_{\kappa\beta}\right.$$

$$\left. - \sum_{\alpha\in\Delta} y_r(\alpha\cdot q)E_d(\alpha)_{\beta\kappa}\, x(\alpha\cdot q)E(\alpha)_{\kappa\beta}\right)$$

$$= \sum_{\kappa\in\Delta,\ \kappa\cdot\beta=1}\left(\sum_{\alpha\in\Delta} x(\alpha\cdot q)\delta_{\beta-\kappa,\alpha}\, y_r(\alpha\cdot q)\delta_{\kappa-\beta,2\alpha}\right.$$

$$\left. - \sum_{\alpha\in\Delta} y_r(\alpha\cdot q)\delta_{\beta-\kappa,2\alpha}\, x(\alpha\cdot q)\delta_{\kappa-\beta,\alpha}\right),$$

persamaan di atas sama dengan nol karena $\delta_{\beta-\kappa,2\alpha}$ dan $\delta_{\kappa-\beta,2\alpha}$ hanya bernilai satu bila $\beta = -\kappa$ atau $\beta\cdot\kappa = -2$. Serta,

$$\left[X_r, Y_r\right]_{\beta\beta} = -2g^2\left(x_r(\beta\cdot q)y_r(-\beta\cdot q) - x_r(-\beta\cdot q)y_r(\beta\cdot q)\right)$$

$$= -2g^2\left(x(\beta\cdot q)y(-\beta\cdot q) - x(-\beta\cdot q)y(\beta\cdot q)\right),$$

dimana telah dipergunakan sifat persamaan (2.9) yaitu $x(t) = x_r(t)$. Sehingga persamaan (3.10b) menjadi:

$$\dot{p}\cdot\beta = -g^2\left(\sum_{\kappa\in\Delta,\ \kappa\cdot\beta=1} x((\beta-\kappa)\cdot q)y((\kappa-\beta)\cdot q) - y((\beta-\kappa)\cdot q)x((\kappa-\beta)\cdot q)\right.$$

$$\left. + 2x(\beta\cdot q)y(-\beta\cdot q) - 2x(-\beta\cdot q)y(\beta\cdot q)\right),$$

dengan mengganti variabel bebas $\beta-\kappa$ menjadi α, dimana pergantian variabel ini tetap memenuhi syarat $\kappa\cdot\beta = 1$ dan $\beta-\kappa$ selalu berada dalam ruang akar yang ditinjau karena dijamin oleh refleksi Weyl, maka diperoleh:

$$\dot{p}\cdot\beta = -g^2\left(\sum_{\alpha\in\Delta,\ \alpha\cdot\beta=1} x(\alpha\cdot q)y(-\alpha\cdot q) - x(-\alpha\cdot q)y(\alpha\cdot q)\right.$$

$$+2x(\beta\cdot q)y(-\beta\cdot q)-2x(-\beta\cdot q)y(\beta\cdot q)\Bigg). \qquad (3.12)$$

Persamaan (3.12) ini didapatkan dari suku kedua persamaan gerak kanonik (4.8) yaitu dengan mengalikan kedua ruasnya dengan β.

$$\dot{p}\cdot\beta=-\frac{g^2}{2}\sum_{\alpha\in\Delta}\big(x(\alpha\cdot q)y(-\alpha\cdot q)-x(-\alpha\cdot q)y(\alpha\cdot q)\big)\alpha\cdot\beta, \qquad (3.13)$$

dengan $\alpha\cdot\beta=\pm 2$ dan $\alpha\cdot\beta=\pm 1$.

Kini yang perlu dibuktikan adalah persamaan (3.10c). Pembuktian ini dibagi menjadi 4 kasus, sesuai dengan bilangan yang memungkinkan dari hasil kali dua buah akar yang berbeda dalam kasus aljabar Lie terhubung secara sederhana yaitu $\{0,\ \pm 1,\ -2\}$, jadi keempat kasus tersebut adalah: (A) $\beta\cdot\gamma=1$, (B) $\beta\cdot\gamma=0$, (C) $\beta\cdot\gamma=-1$, (D) $\beta\cdot\gamma=-2$.

Pembuktian konsistensi pasangan Lax dalam bentuk akar dilakukan dengan menghitung setiap suku yang mungkin dalam persamaan (3.10c) yaitu: $[X,D]_{\beta\gamma}$, $[X,Y]_{\beta\gamma}$, $[X,Y_r]_{\beta\gamma}$, $[X_r,D]_{\beta\gamma}$, $[X_r,Y]_{\beta\gamma}$ dan $[X_r,Y_r]_{\beta\gamma}$. Seperti yang terlihat pada persamaan (4.10c) jumlah total dari semua suku-suku di atas harus sama dengan nol.

3.2.1. Kasus $\beta\cdot\gamma=1$

$$[X,D]_{\beta\gamma}=X_{\beta\gamma}\big(D_\gamma-D_\beta\big), \qquad (3.14)$$

dengan

$$D_\gamma-D_\beta=-ig\Bigg(z(\gamma\cdot q)-z(\beta\cdot q)+\sum_{\kappa\cdot\gamma=1}z(\kappa\cdot q)-\sum_{\kappa'\cdot\beta=1}z(\kappa'\cdot q)\Bigg). \qquad (3.15)$$

Persamaan ini disederhanakan dengan membuang suku-suku yang saling melenyapkan. Somasi pertama $(\kappa\cdot\gamma=1)$ disusun menjadi empat kelompok sesuai dengan nilai $\kappa\cdot\beta=\{2,\ 1,\ 0,\ -1\}$, tidak terdapatnya suku $\kappa\cdot\beta=-2$ atau $\kappa=-\beta$ karena tidak memenuhi syarat $\beta\cdot\gamma=1$ dan $\kappa\cdot\gamma=1$. Demikian juga untuk somasi kedua $\kappa'\cdot\beta=1$ yang dapat disusun menjadi empat kelompok sesuai dengan nilai $\kappa' \cdot \gamma = \{2,1,0,-1\}$. Suku $-z(\beta \cdot q)$ melenyapkan suku $\kappa = \beta$ $(\kappa \cdot \beta = 2)$ dalam somasi pertama. Dengan cara yang sama, suku $z(\gamma \cdot q)$ melenyapkan suku $\kappa' = \gamma$ dalam somasi kedua. Kelompok kedua $\kappa \cdot \gamma = 1$ dengan $\kappa \cdot \beta = 1$ akan lenyap oleh kelompok $\kappa' \cdot \beta = 1$ dengan $\kappa' \cdot \gamma = 1$ atau dengan kata lain $\kappa = \kappa' = (\beta + \gamma)$. Kelompok keempat $\kappa \cdot \gamma = 1$ dengan $\kappa \cdot \beta = -1$ menghasilkan $\kappa = \gamma - \beta$ dan $\kappa' \cdot \gamma = 1$ dengan $\kappa' \cdot \beta = -1$ menghasilkan $\kappa' = \beta - \gamma$ sehingga $z((\gamma - \beta) \cdot q)$ dan $z((\beta - \gamma) \cdot q)$ akan saling melenyapkan karena z adalah fungsi genap. Hanya kelompok yang ketiga yang tertinggal yaitu:

$$D_\gamma - D_\beta = ig\left(\sum_{\kappa \cdot \gamma = 1,\ \kappa \cdot \beta = 0} z(\kappa \cdot q) - \sum_{\kappa' \cdot \beta = 1,\ \kappa' \cdot \gamma = 0} z(\kappa' \cdot q) \right), \tag{3.16}$$

dapat dilihat pada persamaan diatas terdapat korespondensi satu-satu dari dua penjumlahannya, sehingga kedua penjumlahan tersebut bisa direduksi menjadi satu penjumlahan dengan mengganti $\kappa' = \kappa + \beta - \gamma$, pergantian ini memenuhi syarat-syarat penjumlahan kedua dan κ' dalam bentuk κ, β, dan γ tetap berada dalam ruang akar Δ yang dijamin oleh refleksi Weyl yaitu $\kappa' = W_\beta(\kappa - \gamma`)$, dengan menggunakan sifat z sebagai fungsi genap didapat:

$$D_\gamma - D_\beta = -ig \sum_{\kappa \cdot \gamma = 1,\ \kappa \cdot \beta = 0} \left[z(-\kappa \cdot q) - z((\kappa + \beta - \gamma) \cdot q) \right]. \tag{3.17}$$

Persamaan (3.17) disubstitusi ke persamaan (4.14) memberikan:

$$\begin{aligned} [X, D]_{\beta\gamma} &= X_{\beta\gamma}(D_\gamma - D_\beta) \\ &= g^2 \sum_{\kappa \cdot \gamma = 1,\ \kappa \cdot \beta = 0} x((\beta - \gamma) \cdot q) \left[z(-\kappa \cdot q) - z((\kappa + \beta - \gamma) \cdot q) \right], \end{aligned} \tag{3.18a}$$

dengan menggunakan aturan penjumlahan terhadap fungsi x, y dan z, persamaan (2.10) didapat:

$$[X, D]_{\beta\gamma} = g^2 \sum_{\kappa \cdot \gamma = 1,\ \kappa \cdot \beta = 0} \left[y((\kappa + \beta - \gamma) \cdot q) x(-\kappa \cdot q) - y(-\kappa \cdot q) x((\kappa + \beta - \gamma) \cdot q) \right]. \tag{3.18b}$$

Selanjutnya evaluasi $[X,Y]_{\beta\gamma}$:

$$[X,Y]_{\beta\gamma} = \sum_{\kappa\in\Delta,\ \kappa\cdot\beta=1,\ \kappa\cdot\gamma=1} \left(X_{\beta\kappa}Y_{\kappa\gamma} - Y_{\beta\kappa}X_{\kappa\gamma}\right)$$

$$= -g^2 \sum_{\kappa\cdot\beta=1,\ \kappa\cdot\gamma=1} [x((\beta-\kappa)\cdot q)y((\kappa-\gamma)\cdot q) - y((\beta-\kappa)\cdot q)x((\kappa-\gamma)\cdot q)],$$

(3.19)

dengan mengganti variabel bebas κ menjadi $\kappa' = \gamma - \kappa$, didapatkan:

$$[X,Y]_{\beta\gamma} = -g^2 \sum_{\kappa'\cdot\gamma=1,\ \kappa'\cdot\beta=0} [x((\beta-\gamma+\kappa')\cdot q)y(-\kappa'\cdot q) - y((\beta-\gamma+\kappa')\cdot q)x(-\kappa'\cdot q)],$$

(3.20)

persamaan (3.20) ini melenyapkan persamaan (3.18b). Suku-suku lain dalam kasus $\beta\cdot\gamma = 1$ adalah :

$$[X_r, D]_{\beta\gamma} = [X, Y_r]_{\beta\gamma} = [X_r, Y]_{\beta\gamma} = [X_r, Y_r]_{\beta\gamma} = 0\,.$$

Dengan demikian berarti pengujian konsistensi kasus $\beta\cdot\gamma = 1$ telah selesai.

3.2.2. Kasus $\beta\cdot\gamma = 0$

Pada kasus ini $X_{\beta\gamma} = 0$, sehingga:

$$[X, D]_{\beta\gamma} = X_{\beta\gamma}\left(D_\gamma - D_\beta\right) = 0\,,$$

serta bagian lainnya memberikan:

$$[X,Y]_{\beta\gamma} = \sum_{\kappa\in\Delta}\left(X_{\beta\kappa}Y_{\kappa\gamma} - Y_{\beta\kappa}X_{\kappa\gamma}\right).$$

Tinjau sebuah akar κ_1 sehingga $\beta - \kappa_1$ dan $\kappa_1 - \gamma$ adalah akar, pemilihan κ_1 memenuhi $\kappa_1\cdot\beta = 1$ dan $\kappa_1\cdot\gamma = 1$, kemudian $\kappa_2 = \beta + \gamma - \kappa_1 = W_\gamma(\beta - \kappa_1)$ juga memenuhi $\kappa_2\cdot\beta = 1$ dan $\kappa_2\cdot\gamma = 1$ dari ruas kanan persamaan terakhir di atas didapat :

$$g^2[x((\beta-\kappa_1)\cdot q)y((\kappa_1-\gamma)\cdot q) - y((\beta-\kappa_1)\cdot q)x((\kappa_1-\gamma)\cdot q)$$
$$+ x((\beta-\kappa_2)\cdot q)y((\kappa_2-\gamma)\cdot q) - y((\beta-\kappa_2)\cdot q)x((\kappa_2-\gamma)\cdot q)] = 0\,. \quad (3.21)$$

Suku-suku yang lain dalam kasus ini memberikan nilai seperti berikut:

$$[X_r, D]_{\beta\gamma} = [X, Y_r]_{\beta\gamma} = [X_r, Y]_{\beta\gamma} = [X_r, Y_r] = 0.$$

Ini berarti pengujian konsistensi kasus $\beta \cdot \gamma = 0$ telah selesai.

3.2.3. Kasus $\beta \cdot \gamma = -1$

Pada kasus ini didapat:

$$[X, D]_{\beta\gamma} = X_{\beta\gamma}\left(D_\gamma - D_\beta\right) = 0 = [X_r, D],$$

karena $X_{\beta\gamma} = (X_r)_{\beta\gamma} = 0$. Sedangkan untuk tiga suku lain yang memberikan kontribusi adalah $[X,Y]_{\beta\gamma}$, $[X_r,Y]_{\beta\gamma}$ dan $[X,Y_r]_{\beta\gamma}$. Misalnya bagian berikut:

$$[X, Y]_{\beta\gamma} = \sum_{\kappa\in\Delta}\left(X_{\beta\kappa}Y_{\kappa\gamma} - Y_{\beta\kappa}X_{\kappa\gamma}\right),$$

bagian ini hanya memberikan kontribusi pada satu akar κ, yaitu untuk $\beta \cdot \kappa = 1$ dan $\kappa \cdot \gamma = 1$ atau dengan kata lain $\kappa \cdot (\beta + \gamma) = 2$, sehingga $\kappa = \beta + \gamma$ dan didapat:

$$[X, Y]_{\beta\gamma} = -g^2\left[x(-\gamma \cdot q)y(\beta \cdot q) - x(\beta \cdot q)y(-\gamma \cdot q)\right], \qquad (3.22)$$

dua suku lainnya juga hanya memberikan kontribusi pada akar κ tertentu, misalkan untuk $[X_r, Y]_{\beta\gamma}$:

$$[X_r, Y]_{\beta\gamma} = \sum_{\kappa\in\Delta}\left((X_r)_{\beta\kappa}Y_{\kappa\gamma} - Y_{\beta\kappa}(X_r)_{\kappa\gamma}\right)$$

$$= -2g^2\sum_{\kappa\in\Delta}\left(\sum_{\alpha\in\Delta}x_r(\alpha \cdot q)E_d(\alpha \cdot q)_{\beta\kappa}\,y(\alpha \cdot q)E(\alpha \cdot q)_{\kappa\gamma}\right)$$

$$+ 2g^2\sum_{\kappa'\in\Delta}\left(\sum_{\alpha'\in\Delta}y(\alpha' \cdot q)E(\alpha')_{\beta\kappa'}\,x_r(\alpha' \cdot q)E_d(\alpha')_{\kappa'\gamma}\right),$$

dimana $\kappa = -\beta$ dan $\kappa' = -\gamma$, sehingga didapat:

$$[X_r, Y]_{\beta\gamma} = -2g^2\left[x_r(\beta \cdot q)y(-(\beta+\gamma)\cdot q) - y((\beta+\gamma)\cdot q)x_r(-\gamma \cdot q)\right], \qquad (3.23)$$

dan dengan cara yang sama didapat:

$$[X,Y_r]_{\beta\gamma} = -g^2\left[x((\beta+\gamma)\cdot q)y_r(-\gamma\cdot q) - y_r(\beta\cdot q)x(-(\beta+\gamma)\cdot q)\right]. \qquad (3.24)$$

Dengan menggunakan aturan penjumlahan dan sifat dari fungsi *x*, *y* dan *z* persamaan (2.10) didapat:

$$[X,Y]_{\beta\gamma} + [X_r,Y]_{\beta\gamma} + [X,Y_r]_{\beta\gamma} = 0. \qquad (3.25)$$

Dengan demikian berarti pengujian konsistensi kasus $\beta\cdot\gamma = -1$ telah selesai.

3.2.4. Kasus $\beta\cdot\gamma = -2$

Untuk kasus ini, semua suku dengan mudah dapat dilihat akan menghasilkan:

$$[X,D]_{\beta\gamma} + [X,Y]_{\beta\gamma} + [X_r,D]_{\beta\gamma} + [X,Y_r]_{\beta\gamma} + [X,Y_r]_{\beta\gamma} + [X_r,Y_r]_{\beta\gamma} = 0.$$

Dengan selesainya pembuktian terhadap kasus $\beta\cdot\gamma = -2$, maka persamaan Lax dalam bentuk akar terjamin konsistensinya dalam arti persamaan Lax memberikan kembali persamaan gerak kanonik seperti yang dihasilkan dari formalisma Hamilton.

3.3. **Pembuktian Pasangan Lax Untuk A_2 dan A_3**

Selanjutnya dalam sub bab ini akan ditunjukkan secara eksplisit konsistensi pasangan Lax dengan menggunakan aljabar Lie terhubung sederhana A_2 dan A_3.

Dalam pembuktian ini akan ditunjukkan persamaan gerak kanonik yang dihasilkan dari persamaan (2.13), yaitu:

$$\dot{p} = -\frac{g^2}{2}\sum_{\alpha\in\Delta}\left(x(\alpha\cdot q)y(-\alpha\cdot q) - y(\alpha\cdot q)x(-\alpha\cdot q)\right)\alpha$$

dan persamaan gerak kanonik dari persamaan (4.10b), yaitu persamaan (4.12):

$$\dot{p}\cdot\beta = -g^2\Bigg(\sum_{\alpha\in\Delta,\ \alpha\beta=1} x(\alpha\cdot q)y(-\alpha\cdot q) - y(\alpha\cdot q)x(-\alpha\cdot q)$$

$$+ 2x(\beta\cdot q)y(-\beta\cdot q) - y(\beta\cdot q)x(-\beta\cdot q)\Bigg)$$

adalah sama.

3.3.1. Model Calogero-Moser yang berdasarkan aljabar Lie A_2

Untuk ruang akar A_2 yang terdiri dari akar-akar berikut:

$$\Delta = \{\pm\alpha_1,\ \pm\alpha_2,\ \pm(\alpha_1+\alpha_2)\},$$

persamaan gerak (3.8) menjadi:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= -\frac{g^2}{2}\sum_{\alpha\in\Delta}\big(x(\alpha\cdot q)y(-\alpha\cdot q)-y(\alpha\cdot q)x(-\alpha\cdot q)\big)\alpha \\
&= -\frac{g^2}{2}\Big\{\ [x(\alpha_1\cdot q)y(-\alpha_1\cdot q)-y(\alpha_1\cdot q)x(-\alpha_1\cdot q)](\alpha_1) \\
&\quad +[x(\alpha_2\cdot q)y(-\alpha_2\cdot q)-y(\alpha_2\cdot q)x(-\alpha_2\cdot q)](\alpha_2) \\
&\quad +[x((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)y(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q) \\
&\qquad\qquad -y((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)x(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)](\alpha_1+\alpha_2) \\
&\quad +[x(-\alpha_1\cdot q)y(\alpha_1\cdot q)-y(-\alpha_1\cdot q)x(\alpha_1\cdot q)](-\alpha_1) \\
&\quad +[x(-\alpha_2\cdot q)y(\alpha_2\cdot q)-y(-\alpha_2\cdot q)x(\alpha_2\cdot q)](-\alpha_2) \\
&\quad +[x(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)y((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q) \\
&\qquad\qquad -y(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)x((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)](-(\alpha_1+\alpha_2))\ \Big\}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Karena persamaan gerak yang didapat dari persamaan Lax adalah $\dot{p}\cdot\beta$ maka persamaan(3.26) juga harus dikalikan dengan β. Selanjutnya akan ditinjau:

Untuk $\beta=\alpha_1$, maka persamaan (3.26) menjadi:

$$\begin{aligned}
\dot{p}\cdot\alpha_1 = -g^2\Big\{& 2[x(\alpha_1\cdot q)y(-\alpha_1\cdot q)-y(\alpha_1\cdot q)x(-\alpha_1\cdot q)] \\
&+[x(-\alpha_2\cdot q)y(\alpha_2\cdot q)-y(-\alpha_2\cdot q)x(\alpha_2\cdot q)] \\
&+[x((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)y(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q) \\
&\qquad -y((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)x(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)]\ \Big\},
\end{aligned}$$

sedangkan dari persamaan (3.12) setelah diuraikan dan disubstitusikan $\beta = \alpha_1$ didapat:

$$\dot{p} \cdot \alpha_1 = -g^2 \Big\{ [x(-\alpha_2 \cdot q)y(\alpha_2 \cdot q) - y(-\alpha_2 \cdot q)x(\alpha_2 \cdot q)]$$

$$+[x((\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)y(-(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)$$

$$-y((\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)x(-(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)]$$

$$+2[x(\alpha_1 \cdot q)y(-\alpha_1 \cdot q) - y(\alpha_1 \cdot q)x(-\alpha_1 \cdot q)] \Big\}.$$

Dimana terlihat kedua persamaan gerak yang didapat adalah sama.

Untuk $\beta = \alpha_2$, maka persamaan (4.26) menjadi:

$$\dot{p} \cdot \alpha_2 = -g^2 \Big\{ [x(-\alpha_1 \cdot q)y(\alpha_1 \cdot q) - y(-\alpha_1 \cdot q)x(\alpha_1 \cdot q)]$$

$$+2[x(\alpha_2 \cdot q)y(-\alpha_2 \cdot q) - y(\alpha_2 \cdot q)x(-\alpha_2 \cdot q)]$$

$$+[x((\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)y(-(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)$$

$$-y((\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)x(-(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)] \Big\}$$

sedangkan dari persamaan (3.12) setelah diuraikan dan disubstitusikan $\beta = \alpha_2$ didapat:

$$\dot{p} \cdot \alpha_2 = -g^2 \Big\{ [x(-\alpha_1 \cdot q)y(\alpha_1 \cdot q) - y(-\alpha_1 \cdot q)x(\alpha_1 \cdot q)]$$

$$+[x((\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)y(-(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)$$

$$-y((\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)x(-(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot q)]$$

$$+2[x(\alpha_2 \cdot q)y(-\alpha_2 \cdot q) - y(\alpha_2 \cdot q)x(-\alpha_2 \cdot q)] \Big\}.$$

Dimana terlihat bahwa kedua persamaan yang didapat adalah sama. Hal ini juga berlaku untuk akar-akar yang lain dari ruang akar A_2 karena akar-akar yang lain adalah merupakan kombinasi positif dan negatif dari akar-akar sederhana yang telah dihitung di atas.

3.3.2. Model Calogero-Moder yang berdasarkan pada aljabar Lie A_3

Untuk ruang akar A_3 yang terdiri dari akar-akar berikut:

$$\Delta = \{\pm\alpha_1,\ \pm\alpha_2,\ \pm\alpha_3,\ \pm(\alpha_1+\alpha_2),\ \pm(\alpha_2+\alpha_3),\ \pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\},$$

dengan cara yang sama seperti yang dilakukan pada ruang akar A_2, maka untuk akar-akar sederhananya adalah sebagai berikut.

Untuk $\beta = \alpha_1$, setelah kedua ruas dikalikan dengan β maka persamaan (3.8) memberikan:

$$\begin{aligned}\dot{p}\cdot\alpha_1 = -g^2\Big\{ & 2[x(\alpha_1\cdot q)y(-\alpha_1\cdot q) - y(\alpha_1\cdot q)x(-\alpha_1\cdot q)] \\ & +[x(-\alpha_2\cdot q)y(\alpha_2\cdot q) - y(-\alpha_2\cdot q)x(\alpha_2\cdot q)] \\ & +[x((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)y(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q) \\ & \qquad - y((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)x(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)] \\ & +[x((\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)y(-(\alpha_2+\alpha_3)\cdot q) \\ & \qquad - y(-(\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)x((\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)] \\ & +[x((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)y(-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q) \\ & - y((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)x(-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)] \Big\},\end{aligned}$$

sedangkan dari persamaan (3.12) setelah diuraikan dan disubstitusikan $\beta = \alpha_1$ didapat:

$$\begin{aligned}\dot{p}\cdot\alpha_1 = -g^2\Big\{ & [x((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)y(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q) \\ & \qquad - y((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)x(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)] \\ & +[x(-\alpha_2\cdot q)y(\alpha_2\cdot q) - y(-\alpha_2\cdot q)x(\alpha_2\cdot q)] \\ & +[x((\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)y(-(\alpha_2+\alpha_3)\cdot q) \\ & \qquad - y(-(\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)x((\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)] \\ & +[x((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)y(-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)\end{aligned}$$

$$-y\left(\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)\cdot q\right)x\left(-\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)\cdot q\right)\Big]$$

$$+2\left[x\left(\alpha_1\cdot q\right)y\left(-\alpha_1\cdot q\right)-y\left(\alpha_1\cdot q\right)x\left(-\alpha_1\cdot q\right)\right]\Big\}.$$

Terlihat bahwa kedua persamaan yang didapat adalah sama.

Untuk $\beta=\alpha_2$, setelah kedua ruas dikalikan dengan β maka persamaan (3.8) memberikan:

$$\dot{p}\cdot\alpha_2=-g^2\Big\{\left[x\left(-\alpha_1\cdot q\right)y\left(\alpha_1\cdot q\right)-y\left(-\alpha_1\cdot q\right)x\left(\alpha_1\cdot q\right)\right]$$

$$+2\left[x\left(\alpha_2\cdot q\right)y\left(-\alpha_2\cdot q\right)-y\left(\alpha_2\cdot q\right)x\left(-\alpha_2\cdot q\right)\right]$$

$$+\left[x\left(-\alpha_3\cdot q\right)y\left(\alpha_3\cdot q\right)-y\left(-\alpha_3\cdot q\right)x\left(\alpha_3\cdot q\right)\right]$$

$$+\Big[x\left(\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cdot q\right)y\left(-\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cdot q\right)$$

$$-y\left(\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cdot q\right)x\left(-\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cdot q\right)\Big]$$

$$+\Big[x\left(\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\cdot q\right)y\left(-\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\cdot q\right)$$

$$-y\left(-\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\cdot q\right)x\left(\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\cdot q\right)\Big]\Big\}$$

sedangkan dari persamaan (3.12) setelah diuraikan dan disubstitusikan $\beta=\alpha_2$ didapat:

$$\dot{p}\cdot\alpha_2=-g^2\Big\{\Big[x\left(\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cdot q\right)y\left(-\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cdot q\right)$$

$$-y\left(\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cdot q\right)x\left(-\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cdot q\right)\Big]$$

$$+2\left[x\left(\alpha_2\cdot q\right)y\left(-\alpha_2\cdot q\right)-y\left(\alpha_2\cdot q\right)x\left(-\alpha_2\cdot q\right)\right]$$

$$+\left[x\left(-\alpha_3\cdot q\right)y\left(\alpha_3\cdot q\right)-y\left(-\alpha_3\cdot q\right)x\left(\alpha_3\cdot q\right)\right]$$

$$+\left[x\left(-\alpha_1\cdot q\right)y\left(\alpha_1\cdot q\right)-y\left(-\alpha_1\cdot q\right)x\left(\alpha_1\cdot q\right)\right]$$

$$+\Big[x\left(\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\cdot q\right)y\left(-\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\cdot q\right)$$

$$-y\left(-\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\cdot q\right)x\left(\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\cdot q\right)\Big]\Big\}.$$

Terlihat bahwa kedua persamaan yang didapat adalah sama.

Serta untuk $\beta = \alpha_3$, setelah kedua ruas dikalikan dengan β maka persamaan (3.8) memberikan:

$$\begin{aligned}
\dot{p}\cdot\alpha_3 = -g^2 \Big\{ & [x(-\alpha_2\cdot q)y(\alpha_2\cdot q) - y(-\alpha_2\cdot q)x(\alpha_2\cdot q)] \\
& + 2[x(\alpha_3\cdot q)y(-\alpha_3\cdot q) - y(\alpha_3\cdot q)x(-\alpha_3\cdot q)] \\
& + [x(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)y((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q) \\
& \qquad - y(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)x((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)] \\
& + [x((\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)y(-(\alpha_2+\alpha_3)\cdot q) \\
& \qquad - y(-(\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)x((\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)] \\
& + [x((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)y(-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q) \\
& - y((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)x(-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)] \Big\}
\end{aligned}$$

sedangkan dari persamaan (3.12) setelah diuraikan dan disubstitusikan $\beta = \alpha_3$ didapat:

$$\begin{aligned}
\dot{p}\cdot\alpha_3 = -g^2 \Big\{ & [x(-\alpha_2\cdot q)y(\alpha_2\cdot q) - y(-\alpha_2\cdot q)x(\alpha_2\cdot q)] \\
& + 2[x(\alpha_3\cdot q)y(-\alpha_3\cdot q) - y(\alpha_3\cdot q)x(-\alpha_3\cdot q)] \\
& + [x(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)y((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q) \\
& \qquad - y(-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)x((\alpha_1+\alpha_2)\cdot q)] \\
& + [x((\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)y(-(\alpha_2+\alpha_3)\cdot q) \\
& \qquad - y(-(\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)x((\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)] \\
& + [x((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)y(-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q) \\
& - y((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)x(-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot q)] \Big\}.
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa kedua persamaan yang didapat adalah sama. Hal ini juga berlaku untuk akar-akar yang lain dalam ruang akar A_3.

Dengan demikian pembuktian konsistensi atau keberadaan pasangan Lax dengan menggunakan aljabar Lie terhubung secara sederhana telah selesai atau dengan kata lain persamaan Lax dalam bentuk akar terjamin konsistensinya dalam arti persamaan Lax memberikan kembali persamaan gerak kanonik seperti yang dihasilkan dari formalisma Hamilton.

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Simpulan.

Dari pembahasan bab-bab sebelumnya, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut. Formalisma Hamiltonian dan formalisma pasangan Lax memberikan persamaan gerak kanonik yang sama untuk model Calogero-Moser yang berdasarkan sistem akar dari aljabar Lie *simply-laced*. Secara umum dapat dikatakan bahwa, dengan terdefinisinya pasangan operator Lax tersebut, maka integrabilitas model Calogero-Moser dijamin.

4.2. Saran

Perlu dilanjutkan pada penelitian aljabar Lie *non simply-laced*: B_n, C_n, dan F_4 aljabar melalui simetri lipat (*folding*) dari diagram Dynkin bersangkutan aljabar Lie *simply-laced*: A_{2n-1}, D_{n+1}, dan E_6. Dan penentuan formalism Lax untuk model Calogero-Moser berdasarkan sistem akar aljabar Lie *non simply-laced*.

DAFTAR PUSTAKA

1. Braden, H.W., Corrigon, E., Dorey, P.E., dan Sasaki, R., (1990), "*Affine Toda Field Theory and Exact S-matrices*", *Nucl.Phys*. **B338**.
2. Drazin, P.G., dan Johnson, R.S., (1996), "*Soliton: An Introduction*", Cambridge University Press.
3. Eilenberger, G., (1983), "*Solitons: Mathematical Methods for Physicists*", Springer-Verlag.
4. Georgi, H., (1982), "*Lie Algebra in Particle Physics*", The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.
5. Gilmore, R., (1974), "*Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*", John Wiley & Sons.
6. Olshanetsky, M.A., dan Perelomov, A.M., (1981), "*Classical Integrable Finite-Dimensional Systems Related to Lie Algebras*", *Phys.Rep*., **C71**.
7. Scholma, J.K., (1993), "*A Lie Algebraic Study of Some Integrable System Associated with Root System*", Stichting Matematisch Centrum, Amsterdam.